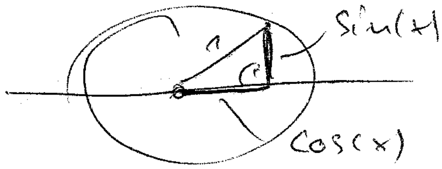
Mathematik 1 3. Übungsblatt

Aufgabe 1:

a) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ folgt sofort aus dem Satz des Pythagoras (den wir mit Hilfe der Vektorrechnung bewiesen haben) für das definierende Dreieck im Einheitskreis



b) $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x})$$
$$- \frac{1}{4}(e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x})$$
$$= \frac{1}{4}(4e^0) = e^0 = 1$$

c)

Mathematik 1 3. Übungsblatt

2. Aufgabe

a) Newtonsche Steigungen

-1 0	$\frac{1-0}{0-(-1)} = \frac{1}{1} = 1$		
0 1		$\frac{1-1}{1-(-1)} = 0$	$\frac{3/2-0}{2-(-1)} = \frac{1}{2}$
	$\frac{2-1}{1-0} = \frac{1}{1} = 1$		
1 2		$\frac{4-1}{2-0} = \frac{3}{2}$	
	$\frac{6-2}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$		
2 6			

$$p(x) = 0 + 1\cdot(x+1) + 0(x+1)(x-0) + \frac{1}{2}(x-(-1))x(x-$$

$$= 0 + x + 1 + \frac{1}{2}(x^3 - x)$$

$$= \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x + 1$$

---

b) Lineares LGS

Ansatz $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$

Einsetzen der Punkte
$p(-1) = a - b + c - d = 0$ I
$p(0) = a = 1$ II
$p(1) = a + b + c + d = 2$ III
$p(2) = a + 2b + 4c + 8d = 6$ IV

II: $a = 1$

I + III $= 2a + 2c = 2 \overset{II}{=} 2\cdot 1 + 2c \Rightarrow c = 0$

$a = 1 \wedge c = 0$ in I und IV:
$-b - d = -1$
$2b + 8d = 5$
$6d = 3$ $d = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

$p(x) = 1 + \frac{1}{2}x + 0x^2 + \frac{1}{2}x^3$

Mathematik 1 Übungsblatt 3

Aufgabe 3

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} = y$ (*)

ist nicht definiert für $x = -1$ Also $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Der Wertebereich ist durch $W = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gegeben

(Die rationale Funktion hat dort für $\lim_{x \to \pm\infty}$ eine horizontale Asymptote)

Die Funktion ist im ganzen Definitionsbereich streng monoton wachsend, die Umkehrfunktion

$f^{-1}: W \to D$
$y \mapsto x$

existiert daher und hat die Zuordnungsvorschrift

$x = \frac{y+1}{1-y}$

Auflösen von (*) nach x

$x_1 > x_2$

$\Rightarrow x_1 + 1 > x_2 + 1$

$\Rightarrow \frac{1}{x_1+1} < \frac{1}{x_2+1}$

$\Rightarrow \frac{-2}{x_1+1} > \frac{-2}{x_2+1}$

$\Rightarrow y_1 = 1 - \frac{2}{x_1+1} > 1 - \frac{2}{x_2+1} = y_2$

Mathematik 1 Übungsblatt 3

Aufgabe 3

b) $\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} = y \quad (*)$

$e^{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} = 2y$

$\ln(e^{1/2x - 1/2}) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \ln(2y)$

$\frac{1}{2}x = \ln(2y) + \frac{1}{2}$

$x = 2\ln(2y) + 1$

Auch diese Funktion ist in ihrem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ streng monoton steigend. Mit $W = (0,\infty) = \mathbb{R}_{>0}$

Die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: W \to D$$
$$y \mapsto x$$

ergibt sich ebenfalls durch Rückrechnen von $(*)$:

Mathematik 1 3. Übungsblatt

Aufgabe 4

$$f(x) = \frac{x^3-3x+2}{2x^2+6x+4} = \frac{(x+2)(x-1)^2}{(x+1)(x+2)} = \frac{(x-1)^2}{x+1}$$

Nullstellen des Nenners aus $x^2+3x+2=0$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-\frac{8}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} = -2, -1$$

Also $D = \mathbb{R} \setminus \{-1,-2\}$ $x_1 = -1$ $x_2 = -2$ sind Singularitäten

Wegen

1	0	-3	2
-2 ↓	-2	+4	-2
1	-2	1	$\boxed{0}$

ist $x_2 = -2$ auch Nullstellen des Zählers (nach Abdivision des Faktors $(x+2)$ zerlegt sich)

und das ~~Rest~~polynom x^2-2x+1 sich in $(x-1)^2$

Durch Vergleich der algebraischen Vielfachheiten (= Anzahl der Faktoren)

zeigt sich, daß $x_1 = -1$ ein Pol (nichtbehebbare Singularität ~~und~~, $x_2 = -2$ dagegen eine hebbare Singularität ist. Als Funktionswert bietet sich dort -9 an

$x_3 = 1$ ist ~~eine~~ die einzige (doppelte) Nullstellen.

Für $x \to \infty$ wächst die Funktion über alle Maßen: $\lim_{x\to\infty} f(x) = „+\infty"$

Mathematik 1 3. Übungsblatt

Aufgabe 5

$p(x) = x^6 - 2x^5 - 18x^4 + 4x^3 + 49x^2 + 30x$

	1	-2	-18	4	49	30	0
$x_1 = 0$	↓	0	-0	0	0	0	
	1	-2	-18	4	49	30	$\boxed{0}$
$x_2 = -1$		-1	3	15	-19	-30	
	1	-3	-15	19	30	$\boxed{0}$	
$x_3 = -1$	↓	-1	+4	+11	-30		
	1	-4	-11	30	$\boxed{0}$		
$x_4 = +2$		2	-4	-30			
	1	-2	-15	$\boxed{0}$			
$x_5 = -3$	↓	-3	+15				
	1	-5	$\boxed{0}$				

Probiere $\pm 2, 3, 5, 6$

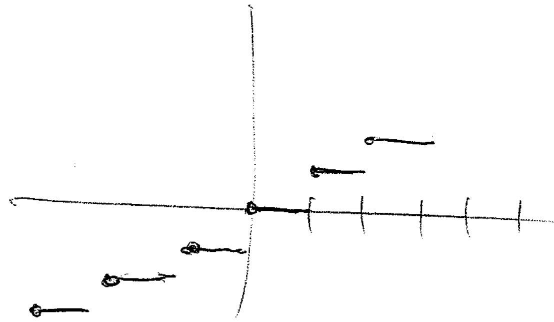
$p(x) = x(x+1)^2(x-2)(x+3)(x-5)$

Mathematik 1 3. Übungsblatt

Aufgabe 6

$\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

a) $x \to [x]$



Die Funktion ist nicht injektiv

z.B. $f(0{,}1) = 0 = f(0{,}2)$ ⚡

aber surjektiv, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = [x] = f(x)$

Nicht injektiv bedeutet aber auch nicht bijektiv

b) $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$n \mapsto (-1)^n [n/2]$

$f(1) = (-1)^1 \cdot 0 = 0$, $f(2) = (-1)^2 \cdot 1 = 1$, $f(3) = (-1)^3 \cdot 1 = -1, \dots$

Die Funktion ist injektiv;

$f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow (-1)^{n_1} [n_1/2] = (-1)^{n_2} [n_2/2]$

$\Rightarrow (-1)^{n_1 - n_2} [n_1/2] = [n_2/2] > 0 \Rightarrow$ n_1, n_2 beiden gerade $\left[\frac{n_1}{2}\right] = \frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2}$ also $n_1 = n_2$

oder beide ungerade

$$\left[\frac{n_1}{2}\right] = \frac{n_1 - 1}{2} = \frac{n_2 - 1}{2} = \left[\frac{n_2}{2}\right]$$

und wieder $n_1 = n_2$

Die Funktion ist auch surjektiv:

Für $z \in \mathbb{Z}$ ist $n = \begin{cases} 2z & \text{für } z > 0 \\ 2|z|+1 & z \le 0 \end{cases}$

das Urbild

Die Abbildung ist damit injektiv <u>und</u> surjektiv, also bijektiv. Die ~~beiden~~ Mengen sind somit gleichmächtig

Mathematik 1 3. Übungsblatt

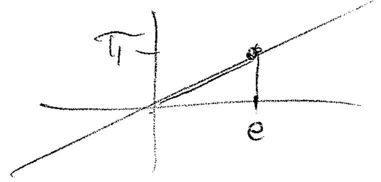
Aufgabe 6

c) Die Funktion

$$\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$
$$p/q \mapsto \frac{p \cdot \pi}{q \cdot e}$$

ist die auf $D = \mathbb{Q}$ eingeschränkte Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{\pi}{e} \cdot x$$



(Ursprungsgerade)

Diese ist injektiv, die eingeschränkte Funktion also erst recht!

Sie ist aber nicht surjektiv, denn z.B. für $y = 1$ findet sich kein rationales Urbild

$$y = \frac{p}{q} \cdot \frac{\pi}{e} = 1 \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{e}{\pi} \notin \mathbb{Q}$$

Mathematik 1 3. Übungsblatt

Aufgabe 7:

a) $p(x) = 3x^3 + 3x^2 - 3x - 3$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 1 & \downarrow & 3 & 6 & +3 \\ \hline & 3 & 6 & +3 & \boxed{0} \\ -1 & \downarrow & -3 & -3 & \\ \hline & 3 & 3 & \boxed{0} & \\ -1 & \downarrow & -3 & & \\ \hline & 3 & \boxed{0} & & \end{array}$$

$p(x) = 3 \cdot (x+1)^2 (x-1)$

Die Nullstellen sind also $x_1 = -1$, und $x_2 = +1$

b) $p(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

Setze $z = x^2$: $p(z) = z^2 - 13z + 36$

$z_{1,2} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{144}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2} = 4, 9$

$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1} = \pm 2 \mid x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2} = \pm 3$

$p(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 9) = (x-2)(x+2)(x-3)(x+3)$

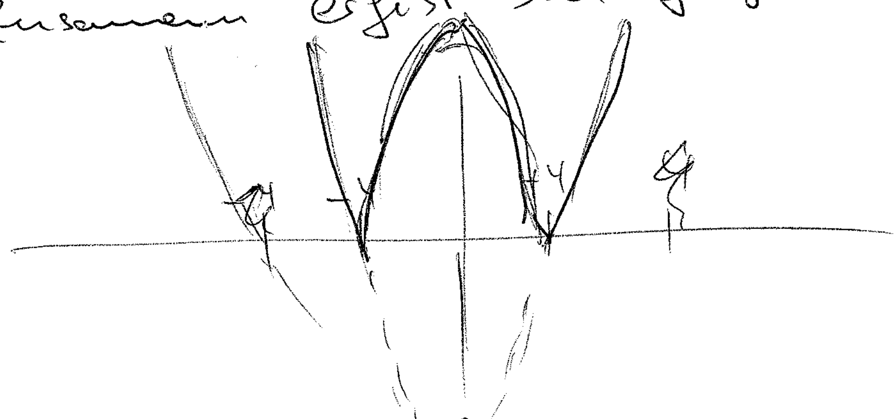
noch Aufgabe 8 Mathematik 1 3. Übungsblatt

es handelt sich dann um die Parabel $f(x) = x^2 - 16$.

Im Bereich $-4 < x < +4$ ist $x^2 - 16$ durchweg negativ, also

$f(x) = |x^2 - 16| = -(x^2 - 16)$ die an der x-Achse gespiegelte obige Parabel.

Zusammen ergibt sich folgendes Bild:



c) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$

- Da der Nenner nie verschwinden kann ist auch hier $D = \mathbb{R}$
- Wieder gilt $f(-x) = f(x)$ da nur quadratische Glieder auftreten
- Die Nullstellen sind die Nullstellen des Zählerpolynoms $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$x_1 = 1$, $x_2 = -1$

Bei $x = 0$ nimmt die Funktion ihren kleinsten Wert bei $f(0) = -1$ an und steigt dann nach beiden Seiten (Symmetrie) an und nähert sich asymptotisch dem Wert 1: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$

Mathematik 1 3. Übungsblatt

Aufgabe 8:

a) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

- $D = \mathbb{R}$ (Jeder Faktor ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ definiert)
- $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin(x)\cos(x) = -f(x)$
  Die Funktion ist also ungerade (schief- oder punktsymmetrisch)
- Die Funktion ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist

  $\sin(x) = 0$ für $x = k \cdot \pi, \; k \in \mathbb{Z}$
  $\cos(x) = 0$ für $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \; k \in \mathbb{Z}$

  Die Funktion verschwindet also für alle Vielfachen von $\pi/2$: $x_k = k \cdot \pi/2$

  Dies wird auch offensichtlich, wenn man $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ beachtet (Additionstheorem!)

  Daraus kann man nun aber auch sofort den Wertebereich $W = [-1/2, 1/2]$ ablesen.

b) $f(x) = |x^2 - 16|$

- Wieder ist die Funktion für alle x definiert $D = \mathbb{R}$
- Und offenbar ist $f(-x) = f(x)$, also handelt es sich um eine gerade (achsensymmetrische) Funktion
- Die Nullstellen $f(x) = 0 = |x^2 - 16|$ finden sich für $x^2 = 16$ also $x_{1,2} = \pm 4$. Für $|x| > 4$ können die Betragsstriche entfallen

Mathematik 1 3. Übungsblatt

Aufgabe 9

a) $e^x + 2e^{-x} = 3$

Setze $y = e^x > 0$: $y + \frac{2}{y} = 3$

also $y^2 + 2 = 3y$

oder $y^2 - 3y + 2 = 0$

$$y_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \cancel{\frac{8}{4}}} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$$= 1, 2$$

$y_1 = e^{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = 0$

$y_2 = e^{x_2} = 2 \Rightarrow x_2 = \ln(2)$

b) $\ln(\sqrt{x}) + \frac{3}{2}\ln(x) = \ln(2x)$

Setze $\sqrt{x} = y$, $x = y^2$:

$$\ln(y) + \frac{3}{2}\ln(y^2) = \ln(2y^2)$$

$4\ln(y) = \ln(y) + 3\ln(y) = \ln(2) + 2\ln(y)$

also $2\ln(y) = \ln(2)$ $\cancel{(4 - 2\ln(2))\ln(y) = 0}$ oder $\ln(y^2) = \ln(2)$ $= \ln(x)$

~~Wegen $(4-2\ln(2)) \neq 0$ muß $\ln(y) = 0$ also $y =$~~

Wegen der Monotonie der ln-Funktion (Injektivität!!) sein

ist somit ~~ist auch $x = y^2 = 1$~~ $x = 2$

Anderer Weg $\ln\sqrt{x} + \frac{3}{2}\ln(x) = \ln x^{1/2} + \ln x^{3/2} = \ln(x^{1/2} \cdot x^{3/2})$

$= \ln(x^2) = \ln(2x) \Rightarrow e^{\ln(x^2)} = x^2 = 2x = e^{\ln(2x)} \Rightarrow \underline{\underline{x = 2}}$

e drüber

Aufgabe 9

c) $\operatorname{arcosh}(2x) = \ln(2)$

$$\cosh(\operatorname{arcosh}(2x)) = 2x = \cosh(\ln(2))$$

$$\cosh(\ln(2)) = \frac{1}{2}\left(e^{\ln(2)} + e^{-\ln(2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{5}{2} = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{8}}$$

Mathematik 1 3. Übungsblatt

Aufgabe 10

$\sin(\arccos(x)) =$

Wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

ist $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$

und $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$

dann ist also

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}$$
$$= \sqrt{1 - x^2}$$

Aufgabe 11

a) Es ist
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$
$$= \cos^2(x) \underbrace{+1 - \sin^2(x)} - 1$$
$$= 2\cos^2(x) - 1$$

also $1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)$

oder $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

b) Setzt man in a) $2x = x'$ dann ergibt sich

$\cos(x') = \cos^2(\frac{x'}{2}) - \sin^2(\frac{x'}{2}) = 1 - \sin^2(\frac{x'}{2}) - \sin^2(\frac{x'}{2})$

also $2\sin^2(\frac{x'}{2}) = 1 - \cos(x')$ oder $\sin(\frac{x'}{2}) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(x')}{2}}$

Mathematik 1 3. Übungsblatt

Aufgabe 12.

$A(0,10)$ $B(5,3)$

auf $y = a \cdot e^{-bx} + 2$

also $10 = a \cdot e^{-b \cdot 0} + 2 = 1 \cdot a + 2 \Rightarrow \boxed{a = 8}$

$3 = a \cdot e^{-5b} + 2 \Rightarrow 1 = 8 \cdot e^{-5b}$

$\frac{1}{8} = e^{-5b}$ $\quad 8 = e^{5b}$

$3\ln(2) = \ln(2^3) = \ln(8) = 5b$

$\boxed{b = \frac{3}{5}\ln(2)}$

Aufgabe 13.

a) $f(x) = 5\cos(2x + 4{,}2) = 5 \cdot \cos(2(x + 2{,}1))$

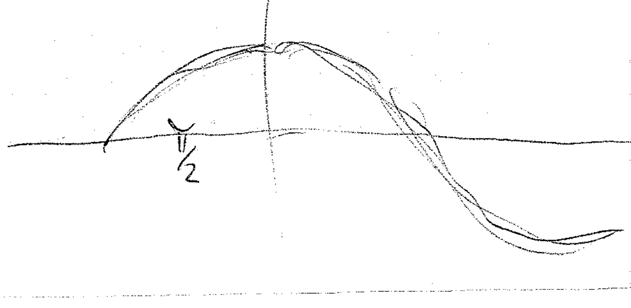
$A = 5, \quad P = \pi, \quad \varphi = 2{,}1 = 2{,}1 \cdot \frac{180}{\pi} \approx$

b) $f(x) = 10\sin(\pi x - 3\pi) = 10\sin(\pi(x-3))$

$A = 10, \quad P = 2, \quad \varphi = 3$

a) $5\cos(2x + 4{,}2) = 5\sin(2x + 4{,}2 + 1{,}57) = 5\sin(2x + 5{,}77$

$= 5\sin(2(x + 2{,}88$



$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$

$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

Mathematik I 4. Übungsblatt

Aufgabe 1: $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

Beweis: Sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

Wir zeigen: Zu $\varepsilon > 0$ existiert N_ε mit

$$\cancel{\lim_{n\to\infty}} \ |a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon$$

für alle $n > N$ (Insbesondere ist $a+b = \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$)

Da $\{a_n\}_{n\to\infty} \to a$ und $\{b_n\}_{n\to\infty} \to b$ konvergieren, gibt es $N_{a,\varepsilon/2}$ und $N_{b,\varepsilon/2}$

mit $|a_n - a| < \varepsilon/2 \ \wedge \ |b_n - b| < \varepsilon/2$

für $n > N_{a,\varepsilon/2}$ ~~bzw~~ $n > N_{b,\varepsilon/2}$

Dann gilt aber ~~für~~ für ~~n~~ $n > N := \max\{N_{a,\varepsilon/2}, N_{b,\varepsilon/2}\}$ nach der Dreiecksungleichung

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

für $n > N$

Mathematik I 4. Übungsblatt

Aufgabe 2: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 1)$

$0, \frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{13}{27}, \frac{40}{81}, \dots \longrightarrow \,?$

Wir vermuten das Bildungsgesetz

$$a_n = \frac{1}{2}\,\frac{3^n-1}{3^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3^n}$$

Beweis durch vollst. Induktion

Induktionsanfang: $a_0 = \frac{1}{2}\,\frac{3^0-1}{3^0} = \frac{1}{2}\,\frac{1-1}{1} = 0$

$a_1 = \frac{1}{2}\,\frac{3^1-1}{3^1} = \frac{1}{2}\,\frac{3-1}{3} = \frac{1}{3}$

Induktionsschritt

$$a_n = \frac{1}{2}\,\frac{3^n-1}{3^n} \Rightarrow$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n+1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\,\frac{3^n-1}{3^n} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}}\left(\frac{1}{2}(3^n-1) + 3^n\right) = \frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{1}{2}\left(3^n-1+2\cdot 3^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{3\cdot 3^n - 1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2}\,\frac{3^{n+1}-1}{3^{n+1}}$$

Nach den Limesrechenregeln gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2} - \lim = \frac{1}{2} - \dots$

Mathematik 1   4. Übungsblatt

Aufgabe 3.

Es sei $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda < 1$ und $\Delta = 1-\lambda$

Dann ist für beliebiges ε

$$* \quad \left|\frac{1}{a_n}\right| \cancel{\left| a_{n+1} - \lambda |a_n| \right|} = \left| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \lambda \right| < \varepsilon$$

für alle $n > N_\varepsilon$ ~~ab einem Index ab~~ $(\geq N_\Delta)$

Insbesondere gibt es einen Index N^* (für $\varepsilon < \Delta$) ab dem gilt

$$|a_{n+1}| - |a_n| = |a_{n+1}| - \lambda|a_n| - \Delta|a_n| < \varepsilon|a_n| - \Delta|a_n|$$

$$= (\varepsilon - \Delta)|a_n| < 0$$

Die Folge der Beträge der a_n ist also monoton fallend und (durch 0) nach unten beschränkt, also konvergent!

Der Grenzwert a genügt also der Bedingung

$$a = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}| = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||a_n|\right) = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \lim_{n\to\infty}|a_n|$$

$$= \lambda \cdot a$$

Wegen $(1-\lambda)a = 0$ und $1-\lambda > 0$ folgt $\underline{\underline{a = 0}}$

$$\varepsilon > \left| \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \lambda \right| = \left| |a_{n+1}|\frac{1}{|a_n|} - \lambda\frac{|a_n|}{|a_n|} \right| = \left|\frac{1}{|a_n|}\left(|a_{n+1}| - \lambda|a_n|\right)\right| = \frac{1}{|a_n|}\left||a_{n+1}| - \lambda|a_n|\right|$$

also $\varepsilon|a_n| > \left||a_{n+1}| - \lambda|a_n|\right|$

Mathematik V 4. Übungsblatt

Aufgabe 4:

a) $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{4n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4n} = \frac{1}{2} + 0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2} - \frac{n}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

c) $$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+4}{\sqrt[3]{n^6+4n^4+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{27n^6+108n^4+144n^2+64}{n^6+4n^4+1}}$$

$$= \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{27n^6+108n^4+144n^2+64}{n^6+4n^4+1}}$$

Stetigkeit von $\sqrt[3]{\ldots}$

$$= \sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{27+108\frac{1}{n^2}+144\frac{1}{n^4}+64\frac{1}{n^6}}{1+4\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^6}}}$$

$$= \sqrt[3]{27} = \underline{\underline{3}}$$

Stetigkeit des Sinus

d) $$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi n^3+n^2}{2n^3+8}\right) = \sin\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi n^3+n^2}{2n^3+8}\right)$$

$$= \sin\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\pi+\frac{1}{n}}{2+\frac{8}{n^3}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{1}}$$

Mathematik I   4. Übungsblatt

Aufgabe 5 $\left| \frac{1}{n^2+1} \right| < 10^{-6}$ für $n \geq$?

$$\left| \frac{1}{n^2+1} \right| = \frac{1}{n^2+1} < 10^{-6} = \frac{1}{10^6} \iff 10^6 < n^2+1$$

$$\iff 10^3 < \sqrt{n^2+1} \underbrace{< \sqrt{n^2+2n+1}}_{=} < n+1 \iff n \geq 10^3$$

$$n \geq 10^3 \implies n^2 \geq 10^6 \implies n^2+1 > 10^6$$

$$\implies 0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{10^6} = 10^{-6} \implies \left| \frac{1}{n^2+1} \right| < 10^{-6}$$

Mathematik Übungsblatt 4

Aufgabe 6:

a) $\lim\limits_{x\to 1} (x^3+5x^2-3x+4) = \lim\limits_{x\to 1} x^3 + 5\lim\limits_{x\to 1} x^2 - 3\lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 4$

$= 1 + 5 - 3 + 4 = \underline{\underline{7}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{1+x^2} = \underline{\underline{0}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$

d) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2-x-12}{x+3} = \lim\limits_{x\to -3} \frac{\cancel{(x+3)}(x-4)}{\cancel{(x+3)}} = \lim\limits_{x\to -3} (x-4)$

$= \underline{\underline{-7}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cancel{\sin(x)}\cos(x)}{\cancel{\sin(x)}} = \lim\limits_{x\to 0} 2\cos(x)$

$= 2 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \cos(x)$

$= 2 \cdot 1 = 2$

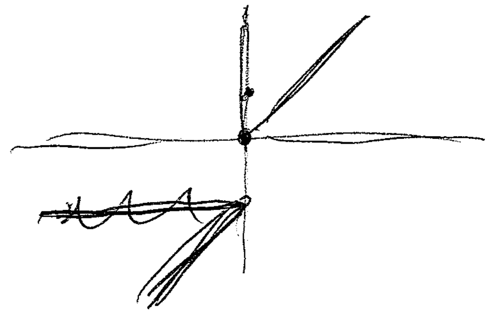
f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(1-x)}{1-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} \cdot \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1-x}{1-x}(1+\sqrt{x})$

$= \lim\limits_{x\to 1} (1+\sqrt{x}) = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$

Mathematik I 4. Übungsblatt

Aufgabe 7:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ x-2 & x < 0 \end{cases}$$



Es ist $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$

und $\lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0} x-2 = 0-2 = -2$

also $\lim_{x \to 0+} f(x) \neq \lim_{x \to 0-} f(x)$ linksseitige Limes $\neq$ rechtsseitige Limes

daher ist $f(x)$ in $x = 0$ unstetig

Mathematik I   4. Übungsblatt

Aufgabe 8:

$$f(x) = \frac{x(x-1)}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & +1 & -1 \\ 1 & \downarrow & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)$ hat eine Definitionslücke bei $x = -1$

die aber hebbar ist: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{2}$

Die so erweiterte Funktion

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq 1 \\ 1/2 & \text{für } x = 1 \end{cases}$$

ist überall stetig und differenzierbar

Mathematik I 4. Übungsblatt

Aufgabe 9:

a) $f(x) = 8x^7 - 10x^3 + 10/x^3 - 8/x^7$

$f'(x) = 56x^6 - 30x^2 - 30/x^4 + 56/x^8$

b) $f(e) = 2 \sqrt[4]{\sqrt[15]{e}} + 3 \sqrt[5]{\sqrt[12]{e}} - 3 \sqrt[3]{\sqrt[20]{e}} - 3 \sqrt[6]{\sqrt[10]{e}}$

$= (2+3-3-3) \sqrt[60]{e} = -\sqrt[60]{e} = -e^{\frac{1}{60}}$

$f'(e) = -\frac{1}{60} e^{-\frac{59}{60}} = \cancel{-\frac{1}{60} \frac{1}{\sqrt[60]{e^{59}}}} = \frac{-1}{60 \sqrt[60]{e^{59}}}$

c) $f(x) = (x^3 + x^2)\sqrt{x} = (x^3 + x^2) \cdot x^{1/2} = x^{7/2} + x^{5/2}$

$f'(x) = (3x^2 + 2x)\sqrt{x} + (x^3 + x^2)\frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}$

$= (3x^2 + 2x)\sqrt{x} + (x^2 + x)\frac{1}{2}\sqrt{x}$

$= \left(\frac{7}{2}x^2 + \frac{5}{2}x\right)\sqrt{x} = \frac{7}{2}x^{5/2} + \frac{5}{2}x^{3/2}$

d) $f(x) = (a + bx^2)(c + dx)^3$

$f'(x) = 2bx \cdot (c + dx)^3 + (a + bx^2) \cdot 3(c + d x)^2$

e) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ $\left(= \frac{1}{2}\sin(2x)\right)$

$f'(x) = \cos(x) \cdot \cos(x) + \sin(x) \cdot (-\sin(x)) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$(= \cos(2x))$

f) $f(x) = x^4 \cdot e^x$

$f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} \cdot e^x + x^4 e^x = (x^4 + 4x^{4-1})e^x$

Mathematik 1 4. Übungsblatt

Aufgabe 10:

a) $\left(\frac{10\sin(x)}{x^3}\right)' = \frac{10x^3\cos(x) - 30x^2\sin(x)}{x^6} = \frac{10x\cos(x) - 30\sin(x)}{x^4}$

b) $\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}\right)' = \frac{(x^2-12x+20)(2x-5) - (2x-12)(x^2-5x+6)}{(x^2-12x+20)^2} =$

$\frac{-7x^2+28x-28}{x^4-24x^3+188x^2-480x+400} = -7\frac{x^2-4x+4}{(x^2-4x+4)(x^2-20x+100)}$

$= \left(\frac{x-3}{x-10}\right)'$

c) $\left(\frac{x}{x^2+2}\right)' = \frac{1(x^2+2) - x(2x)}{x^4+4x^2+4} = \frac{2-x^2}{x^4+4x^2+4}$

d) $\left(\frac{\sin(\varphi)}{1-\cos(\varphi)}\right)' = \frac{(1-\cos(\varphi))\cdot\cos(\varphi) - \sin(\varphi)\cdot\sin\varphi}{1-2\cos\varphi+\cos^2(\varphi)} = \frac{\cos\varphi-\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}{(1-\cos(\varphi))^2}$

$= \frac{\cos(\varphi)-1}{(1-\cos(\varphi))^2} = \frac{-1}{1-\cos(\varphi)} = \frac{1}{\cos(\varphi)-1}$

e) $\left(\frac{x^2e^x}{e^x-1}\right)' = \frac{(e^x-1)(2xe^x+x^2e^x) - x^2e^x\cdot e^x}{e^{2x}-2e^x+1} = \frac{2xe^{2x} - x^2e^x - 2xe^x}{e^{2x}-2e^x+1}$

f) $\left(\frac{x\cdot\ln(x)}{(x-1)^2}\right)' = \frac{(x-1)^{\cancel{2}}(\ln(x)+1) - x\ln(x)\,2\cdot\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}3}} = \frac{-x\ln(x)-\ln(x)+x+1}{(x-1)^3}$

$= \frac{(x+1)(1-\ln(x))}{(x-1)^3}$

Mathematik 1 4. Übungsblatt

<u>Aufgabe 11:</u>

a) $$y'(x) = \left(\ln(\sin(2x-3))\right)' = \frac{1\cdot\cos(2x-3)\cdot 2}{\sin(2x-3)}$$

b) $$\frac{d}{dx}\left(\sin(y(x))\right) = \cos(y)\cdot y' = y'\cdot x^2 + y(x)\cdot 2x$$
$$y'(x) = \frac{y(x)\cdot 2x}{\cos(y) - x^2}$$

c) $$y(x) = x^{\sin(x)} = e^{\ln(x)\cdot\sin(x)}$$
$$y'(x) = e^{\ln(x)\cdot\sin(x)}\left(\frac{\sin(x)}{x} + \ln(x)\cdot\cos(x)\right)$$
$$= x^{\sin(x)}\left(\frac{\sin(x)}{x} + \ln(x)\cdot\cos(x)\right)$$

d) $$\frac{d}{dx}\left(\ln(y(x)) - \sqrt{y(x)} - x\right) = 0 = \frac{y'(x)}{y(x)} - \frac{1}{2}\frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}} - 1$$
$$1 = y'(x)\left(\frac{1}{y(x)} - \frac{1}{2\sqrt{y(x)}}\right) = y'(x)\,\frac{2-\sqrt{y(x)}}{2y(x)}$$
$$y'(x) = \frac{2y(x)}{2-\sqrt{y(x)}}$$

e) $$\frac{d}{dx}(x^x)^x = \frac{d}{dx}\left(e^{x\cdot\ln(x)}\right)^x = \frac{d}{dx}\left(e^{x^2\ln(x)}\right) = e^{x^2\ln(x)}\left(2x\ln(x) + x\right)$$
$$= (x^x)^x\left(2\ln(x)+1\right)\cdot x$$

f) $$\frac{d}{dx}x^{(x^x)} = \frac{d}{dx}\left(\left(e^{\ln(x)}\right)^{x^x}\right) = \frac{d}{dx}\left(e^{x^x\cdot\ln(x)}\right) = e^{x^x\ln(x)}\cdot\left\{x^x(\ln(x)+1)\ln(x) + x^{x-1}\right\}$$